



Probabilités.

Livre p.292.

Objectifs :

- Connaître le vocabulaire de base des probabilités
- Savoir reconnaître et exploiter une situation d'équiprobabilité
- Savoir calculer et utiliser la probabilité d'un événement, de l'événement contraire, de l'intersection et de la réunion d'événements

Aperçu historique : Le but des probabilités est d'essayer de rationaliser le hasard : quelles sont les chances d'obtenir un résultat suite à une expérience aléatoire ? Quelles chances ai-je d'obtenir « pile » en lançant une pièce de monnaie ? Quelles chances ai-je d'obtenir « 6 » en lançant un dé ? Quelles chances ai-je de valider la grille gagnante du loto ?

L'apparition de la notion de « risque », préalable à l'étude des probabilités, n'est apparue qu'au ^{xiii} siècle pour l'évaluation de contrats commerciaux avec le Traité des contrats de Pierre de Jean Olivi, et s'est développée au ^{xv} siècle avec la généralisation des contrats d'assurance maritime. Mais le véritable début de la théorie des probabilités date de la correspondance entre Pierre de Fermat et Blaise Pascal en 1654. C'est dans la deuxième moitié du ^{xviii} siècle, à la suite des travaux de Blaise Pascal, Pierre de Fermat et Christian Huygens que le terme « probabilité » prend peu à peu son sens actuel avec les développements du traitement mathématique du sujet par Jakob Bernoulli. Au ^{xviii} siècle, Gabriel Cramer donne un cours sur la logique probabiliste qui deviendra une base à l'article probabilité de l'encyclopédie de Diderot écrite à la fin de ce même siècle. Ce n'est alors qu'au ^{xix} siècle qu'apparaît ce qui peut être considéré comme la théorie moderne des probabilités en mathématiques. Le calcul des probabilités prend un nouvel essor au début du ^{xx} siècle avec les travaux de Kolmogorov ; commence alors la théorie des probabilités. Les probabilités deviennent une science et une théorie comme branche des mathématiques.



Fermat



Pascal



Kolmogorov

1. Probabilités sur un ensemble fini : premières définitions

A. Vocabulaire : expérience aléatoire, issue, univers, événement.

Lorsque l'on étudie un phénomène aléatoire, comme le lancer d'un dé ou le tirage d'une boule au hasard, on dit qu'il s'agit d'une *expérience aléatoire*.

Au cours d'une expérience aléatoire, les résultats possibles sont appelés les *issues* (notées généralement e_i), ou éventualités.

Lorsque l'on lance un dé à 6 faces, les issues possibles sont 1, 2, 3, 4, 5, 6.

L'ensemble des éventualités est appelé *l'univers* de l'expérience aléatoire. On le note généralement Ω (omega majuscule dans l'alphabet grec). Dans notre exemple, $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Un *événement* est un ensemble constitué d'issues. Cela peut être, avec notre lancer de dé, "obtenir un nombre pair". Un événement ne comportant qu'une seule issue est appelé *événement élémentaire*.

Cas particuliers :

- Ω est l'événement *certain* : $p(\Omega) = 1$;
- $\emptyset$ est l'événement *impossible* : $p(\emptyset) = 0$.

B. Modélisation d'une expérience aléatoire.

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire en notant les résultats obtenus, on peut compter le nombre de fois où chaque événement élémentaire se produit, et ensuite calculer sa fréquence d'apparition. On obtient alors pour chaque éventualité e_i une fréquence $f_i = \frac{n_i}{N}$, où n_i est le nombre d'apparitions de e_i et N le nombre total d'expériences.

Définition 10.1 Soit une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{x_1; x_2; \dots; x_i; \dots; x_n\}$.

Modéliser cette expérience aléatoire, c'est associer à chaque issue x_i un nombre p_i appelé *probabilité* de x_i , tel que :

- Pour tout nombre entier i entre 1 et n , $0 \leq p_i \leq 1$
- $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

Exemple Dans le cas du lancer d'un dé à 6 faces, si ce dé est équilibré, on aura :

issue x_i	1	2	3	4	5	6
probabilité p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Propriété 10.1 (admise) La loi des grands nombres.

- Si on connaît un modèle adapté à une expérience aléatoire, alors quand on répète un grand nombre de fois cette expérience, les fréquences des issues se rapprochent des probabilités données par le modèle.
- A l'inverse, on peut choisir un modèle en répétant l'expérience aléatoire un grand nombre de fois, et en observant vers quels nombres les fréquences des issues se stabilisent.

C. Équiprobabilité

Définition 10.2 Lorsque, dans une expérience aléatoire, toutes les issues ont la même probabilité p de se réaliser, on dit qu'il y a *équiprobabilité*.

Si cette expérience aléatoire possède n issues, alors $p = \frac{1}{n}$

Démonstration D'après la définition d'une probabilité, on a $\underbrace{p + p + \dots + p}_{n \text{ termes}} = 1$.

Ainsi, $np = 1$, d'où : $p = \frac{1}{n}$

L'exemple du dé à six faces qui illustre le paragraphe 1.B est une situation d'équiprobabilité.

2. Calcul de probabilités

A. Probabilité d'un événement

Nous avons vu qu'un événement est un ensemble constitué d'issues. Dans le cas du lancer d'un dé à 6 faces équilibré, l'événement A "obtenir un nombre pair" est constitué des issues 2;4;6. On note $A = \{2; 4; 6\}$

C'est un sous-ensemble (ou une partie) de l'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

On note $A \subset \Omega$ (" A est inclus dans Ω ").

Lorsqu'une issue x_i appartient à A , on dit que x_i réalise A .

Définition 10.3 La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des issues qui réalisent A .
On la note $p(A)$.

Conséquences :

- $p(\emptyset) = 0$
- $p(\Omega) = 1$
- Pour tout événement A , $0 \leq p(A) \leq 1$

Exemple Soit un dé à 6 faces "pipé" (truqué) de telle manière que l'on ait pour chaque issue la probabilité suivante :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

L'événement A "obtenir un nombre pair" est réalisé par les issues 2, 4 et 6.

Dons $p(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$

Propriété 10.2 Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est donnée par :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre d'issues total de } \Omega}$$

On retrouve ici la propriété souvent vue en Troisième sous la forme "nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles".

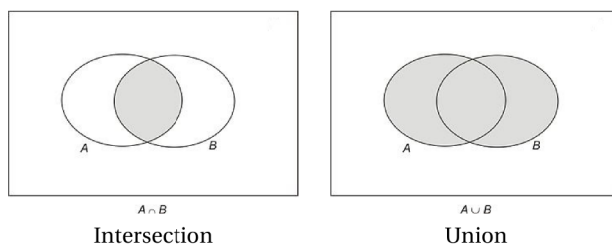
Démonstration Comme on est en situation d'équiprobabilité, la probabilité de chaque issue est $\frac{1}{n}$, où n désigne le nombre total d'issues de Ω .

Si l'événement A est réalisé par m issues $x_1, \dots, x_m$, on a :

$$p(A) = p(x_1) + \dots + p(x_m) = \underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{m \text{ termes}} = \frac{m}{n}$$

B. Intersection et réunion d'événements

Soient A et B deux événements d'un univers Ω . Sur les schémas ci-dessous, l'univers Ω est représenté par le rectangle, et les événements A et B par des ovales.



Définition 10.4 :

- L' *intersection* de A et B est l'événement formé des issues qui réalisent à la fois l'événement A **et** l'événement B . On le note $A \cap B$, et on dit " A inter B ".
- La *réunion* de A et B est l'événement formé des issues qui réalisent **ou bien** l'événement A , **ou bien** l'événement B , **ou les deux**. On le note $A \cup B$, et on dit " A union B ".

On remarquera qu'il y a une différence entre le "ou" du langage "quotidien" et le "ou" utilisé en mathématiques. Dans la vie courante, lorsque l'on dit "fromage ou dessert", on ne peut pas avoir les deux : c'est un "ou" exclusif.

En mathématiques, le "ou" n'est pas exclusif : il signifie l'un, l'autre ou les deux.

Propriété 10.3 Quels que soient les événements A et B , on a :

$$p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$$

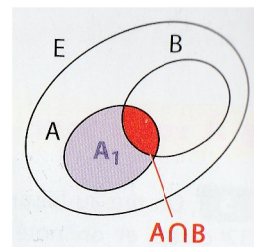
Rappel : On dit que deux événements A et B sont incompatibles lorsqu'ils ne peuvent pas avoir lieu en même temps, c'est-à-dire lorsque l'on ne peut pas avoir " A et B ", ou encore lorsque $A \cap B = \emptyset$. Dans ce cas, on a vu en Troisième que $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Démonstration Notons A_1 l'événement formé des issues qui sont dans A mais ne sont pas dans B .

Les événements A_1 et B sont incompatibles, donc $p(A_1 \cup B) = p(A_1) + p(B)$.

Or $A_1 \cup B = A \cup B$, donc $p(A \cup B) = p(A_1) + p(B)$.

Par suite, $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A_1) + p(B) + p(A \cap B) = p(A_1) + p(A \cap B) + p(B)$. Or A_1 et $A \cap B$ sont incompatibles et de réunion A , donc $p(A_1) + p(A \cap B) = p(A)$. Finalement, $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$.

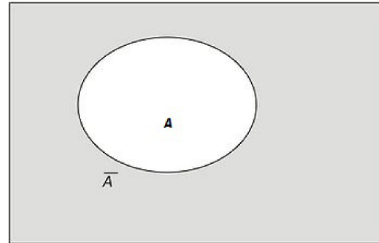


Autre interprétation : On peut également écrire cette formule $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. Dans ce cas, on peut dire que lorsque l'on considère $p(A) + p(B)$, "on compte deux fois $p(A \cap B)$ " : une fois en tant que partie de A , et une autre fois en tant que partie de B . Cela permet d'interpréter la soustraction " $-p(A \cap B)$ ", qui vient "corriger" cela.

C. Événement contraire

Définition 10.5 L'événement contraire d'un événement A est formé des issues qui n'appartiennent pas à A . On le note $\bar{A}$ et on dit " A barre".

Exemple dans le cas d'un lancer de dé à 6 faces, si A représente l'événement "obtenir un nombre pair", alors $\overline{A}$ représente l'événement "obtenir un nombre impair".



Evénement contraire de A , noté $\bar{A}$.

Propriété 10.4 Pour tout événement A :

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1$$

Démonstration A et $\bar{A}$ sont des événements incompatibles, et $A \cup \bar{A} = \Omega$. Donc $p(A) + p(\bar{A}) = p(A \cup \bar{A}) = p(\Omega) = 1$ (événement certain).

3. Synthèse sur les probabilités

Équiprobabilité : $p = \frac{1}{n}$

$$p(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

$$p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$$

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1$$

[illegible]